



Precisemos algunos conceptos:

Operación binaria definida en un conjunto no vacío A

Es una aplicación \odot del producto cartesiano de $A \times A$ en B

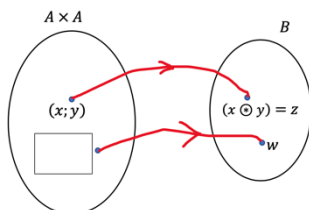
En símbolos:

\odot es operación binaria en A

ssi

$$\odot : A \times A \longrightarrow B$$

$$(x; y) \longmapsto (x \odot y) = z \quad (z \in B)$$



\odot	x	y	
x		$x \odot y = z$	
y	w		

Llene la cajita vacía en $A \times A$.

Si cada casilla de la rejilla (señalados con azul) son elementos de A, diremos que la operación en el conjunto A es interna estructura $\langle A; \odot \rangle$ es llamada MAGMA.

Ejemplos:

\odot	a	b	c
a	b	b	a
b	c	a	c
c	a	c	b

$\langle A; \odot \rangle$

ES MAGMA

■	a	b	c
a	b	b	a
b	c	a	x
c	a	c	b

$\langle A; \blacksquare \rangle$

NO ES MAGMA

⊠	a	B	c
a	a	c	b
b	b	a	c
c	c	b	a

$\langle A; \boxtimes \rangle$

ES MAGMA

⊠	p	n	o
p	a	c	b
n	b	a	c
o	c	b	a

$\langle A; \boxtimes \rangle$

¿ES MAGMA?

Algunos ejemplos conocidos $\langle \omega; + \rangle$; $\langle \mathbb{Z}; \cdot \rangle$; $\langle \mathbb{Q}; + \rangle$ $\langle \mathbb{R}; + \rangle$

¿ $\langle \mathbb{Z}; - \rangle$ es MAGMA? _____; Ilustre con un ejemplo _____.

¿ $\langle \omega; - \rangle$ es MAGMA? _____; Ilustre con un ejemplo _____.

En un magma, por ejemplo $\langle A; \odot \rangle$, las expresiones: $a \odot b \odot c$; $a \odot b \odot c \odot d$ no tienen sentido, ¿por qué?

Démosle sentido (y resolvámosla)

$a \odot b \odot c$	$a \odot b \odot c \odot b$
---------------------	-----------------------------

¿De que otra manera le hubiéremos podido dar sentido?

$a \odot b \odot c$	$a \odot b \odot c \odot b$
---------------------	-----------------------------

Comente _____.

Si $\langle A; \odot \rangle$ es un magma y además la operación \odot es asociativa, es decir:
 $\forall x, y, z \in A. \quad (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
 se dice que $\langle A; \odot \rangle$ es un MONOIDE.

Ejemplo.

$M = \{f, g\}$, ¿ $\langle M; \ominus \rangle$ es un monoide?

\ominus	f	g
f	f	f
g	g	f

¿ \ominus es asociativa? No lo podemos determinar con una mirada a la rejilla; para determinar debemos verificar todos los casos. Empecemos, llene los espacios

_____ \ominus _____ \ominus _____

¿De cuántas maneras podemos llenar estos espacios? 8. ¿Por qué 8? _____
 Hagamos una lista de todos ellos.

$f \ominus f \ominus f$
 $f \ominus f \ominus g$

$f \ominus g \ominus f$
 $f \ominus g \ominus g$

$g \ominus f \ominus f$
 $g \ominus f \ominus g$

$g \ominus g \ominus f$
 $g \ominus g \ominus g$

Verifiquemos cada uno (complete espacios)

$(f \ominus f) \ominus f \stackrel{?}{=} f \ominus (f \ominus f)$	$(f \ominus f) \ominus g \stackrel{?}{=} f \ominus (f \ominus g)$		
_____ $\ominus f \stackrel{?}{=} f \ominus$ _____	_____ $\ominus g \stackrel{?}{=} f \ominus$ _____		
_____ $\stackrel{?}{=}$ _____	_____ $\stackrel{?}{=}$ _____		

Ejemplo.

$N = \{a, b, c\}$, ¿ $\langle N; \bowtie \rangle$ es un monoide?

\bowtie	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

¿ \bowtie es asociativa? No lo podemos determinar con una mirada a la rejilla; para determinar debemos verificar todos los casos. Empecemos, llene los espacios

_____ \bowtie _____ \bowtie _____

¿De cuántas maneras podemos llenar estos espacios? _____.
 He aquí algunos casos, completelos

$a \bowtie a \bowtie a$

$b \bowtie a \bowtie a$

$a \bowtie a \bowtie b$

$b \bowtie a \bowtie b$

$a \bowtie a \bowtie c$

$b \bowtie a \bowtie c$

$a \bowtie b \bowtie a$

$b \bowtie b \bowtie a$

$a \bowtie b \bowtie b$

$b \bowtie b \bowtie b$

$a \bowtie b \bowtie c$

$b \bowtie b \bowtie c$

$a \bowtie c \bowtie$ _____

$a \bowtie c \bowtie$ _____

$a \bowtie c \bowtie$ _____

Verifiquemos algunos casos (complete espacios)

$(a \bowtie a) \bowtie b \stackrel{?}{=} a \bowtie (a \bowtie b)$ $_____ \bowtie b \stackrel{?}{=} a \bowtie _____$ $_____ \stackrel{?}{=} _____$	$(c \bowtie a) \bowtie b \stackrel{?}{=} c \bowtie (a \bowtie b)$ $_____ \bowtie b \stackrel{?}{=} c \bowtie _____$ $_____ \stackrel{?}{=} _____$		

Si $\langle A; \circledast \rangle$ es un monoide y además la operación \circledast tiene un elemento neutro en A , es decir:
 $\exists n \in A$ tal que $\forall x \in A \quad x \circledast n = x = n \circledast x$
 se dice que $\langle A; \circledast \rangle$ es un GRUPOIDE

Ejemplo

$A = \{a, b, c\}$, $\langle A; \circledast \rangle$ es un grupoide, con elemento neutro c , en la rejilla se visualiza fácilmente con una columna y una fila iguales al encabezado de la rejilla.

\circledast	a	b	c
a	b	b	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Si $\langle A; \circledast \rangle$ es un grupoide y además todo elemento de A tiene recíproco, es decir:
 $\forall x \in A, \exists y \in A$ tal que $x \circledast y = n = y \circledast x$ (n elemento neutro), (x es el recíproco de y)
 se dice $\langle A; \circledast \rangle$ es GRUPO
 El recíproco de x usualmente se simboliza x^{-1}

Ejemplo.

$N = \{a, b, c\}$, ¿ $\langle N; \bowtie \rangle$ es un GRUPO? ¿Hay elemento neutro?

\bowtie	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

¿Todo elemento de N tiene recíproco? Para saberlo complete los espacios:

$$a \bowtie _ = c = _ \bowtie a$$

$$b \bowtie _ = c = _ \bowtie b$$

$$c \bowtie _ = c = _ \bowtie c$$

Si $\langle A; \odot \rangle$ es grupo y además la operación es conmutativa en A es decir:

$$\forall x, y \in A, \text{ se cumple } x \odot y = y \odot x$$

se dice que $\langle A; \odot \rangle$ es un **GRUPO CONMUTATIVO** o **GRUPO ABELIANO**.

Ejemplo

\odot	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	$?$	d	b

En la rejilla de un grupo conmutativo la diagonal señalada con verde funciona como espejo.

Sean $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ $B = \{a, b, c, d, e\}$ Teniendo en cuenta las anteriores definiciones y la operación \odot definida en A , y las operaciones Δ y \hookrightarrow definidas en B , complete los espacios, Llene la tabla

\odot	a	b	c	d	e	f		Δ	a	b	c	d	e		\hookrightarrow	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e	f		a	b	a	e	c	d		a	d	c	d	b	a
b	b	a	e	f	c	d		b	a	b	c	d	e		b	c	a	b	e	b
c	c	f	a	e	d	b		c	e	c	b	e	a		c	e	d	e	a	c
d	d	e	f	a	b	c		d	c	d	e	a	b		d	b	e	a	c	d
e	e	d	b	c	f	a		e	d	e	a	b	c		e	a	b	c	d	e
f	f	c	d	b	a	e														

Elemento neutro para $\odot =$ _____. Elemento neutro para $\Delta =$ _____ Elemento neutro para $\hookrightarrow =$ _____

Complete con SI o NO la tabla explique los "NO"

	MAGMA	MONOIDE	GRUPOIDE	GRUPO	GRUPO CONMUTATIVO
$\langle A; \odot \rangle$		SI			
$\langle B; \Delta \rangle$		SI			
$\langle B; \hookrightarrow \rangle$		NO			

